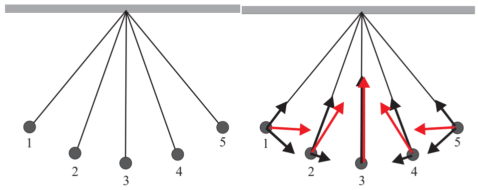
Departamento de Física

Física I

Rotação - Resolução

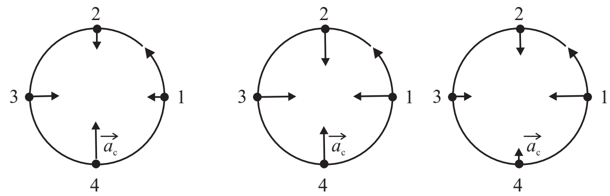
Questões:

Q1 -. Um pêndulo oscila desde a extremidade da trajectória, à esquerda (ponto 1), até à outra extremidade, à direita (ponto 5). Em cada um dos pontos indicados, marque as componentes vectoriais centrípeta, $\vec{a}_c$, e tangencial, $\vec{a}_t$, da aceleração, tendo em conta o comprimento relativo de cada vector. Marque, com cor diferente o vector aceleração (total), $\vec{a}$, também em cada ponto.



A encarnado estão indicados os vectores aceleração total, em cada ponto.

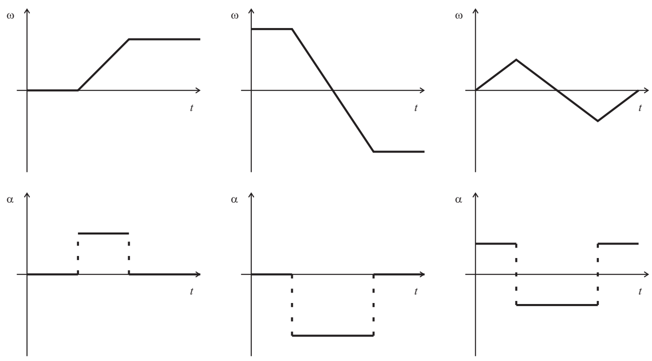
Q2 - As figuras mostram a componente vectorial centrípeta, $\vec{a}_c$, em quatro posições sucessivas da trajectória de uma partícula que se move descrevendo uma trajectória circular no sentido directo.



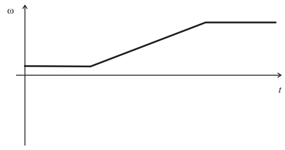
a) Em cada figura, desenhe o vector componente tangencial da aceleração , $\vec{a}_t$, nos pontos 2 e 3 (se esse vector fôr nulo, escreva $\vec{a}_t = \vec{0}$.)

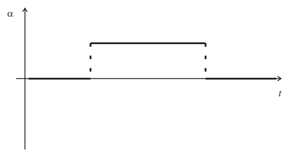
b) Considerando positiva a rotação no sentido directo, e negativa no sentido retrógrado, determine, para cada caso, se a aceleração angular, α, em torno do centro da trajectória é positiva, negativa ou nula.

Q3 - Considere os seguintes gráficos da velocidade angular de um corpo, em torno de um eixo, em função do tempo. Para cada caso, desenhe o correspondente gráfico da aceleração angular em função do tempo.

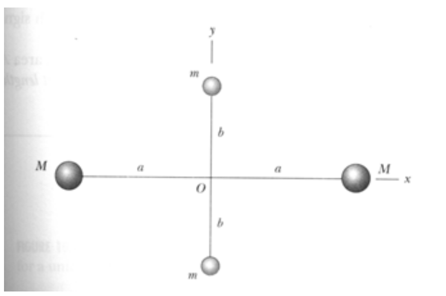


Q4 - Uma roda rola para a esquerda sobre uma superfície horizontal, desce em seguida uma rampa, e continua depois a rolar noutra superfície horizontal. Desenhe os gráficos da velocidade e aceleração angulares da roda (em torno do seu eixo), em função do tempo.





Q5 - Suponha $a = b$ e $M > m$ no sistema de partículas representado na figura 1. Em torno de que eixo (x, y ou z) é que o momento de inércia tem o menor valor? e o maior valor? Justifique.



Estamos a utilizar a aproximação de massas pontuais (partículas). O momento de inércia do sistema em relação a um eixo é dado por

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i d_i^2,$$

em que d_i é a distância da partícula de massa m_i ao eixo de rotação. Atendendo à relação entre as massas, facilmente concluiremos

$$I_x < I_y < I_z.$$

Efectuando os cálculos,

$$I_x = 2mb^2, \quad I_y = 2Ma^2, \quad I_z = 2\left(mb^2 + Ma^2\right),$$

o que, com as relações dadas ($a = b$ **e** $M > m$) confirma a nossa conclusão.

Q6 - O momento de inércia de uma barra rígida homogénea em torno de um eixo que passa pelo centro é $\frac{1}{12}ML^2$, em que M é a massa da barra e L o seu comprimento. O momento de inércia da mesma barra em torno de um eixo passando por uma extremidade é $\frac{1}{3}ML^2$. Sem efectuar cálculos, dê uma explicação física para o facto de o momento de inércia ser maior no último caso do que no primeiro.

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo é dado, genericamente, por

$$I = \sum_{i}^{N} m_i r_i^2,$$

em que estamos a considerar que o corpo é constituído por N partículas, estando a partícula com massa m_i à distância r_i do eixo. No caso em que o eixo passa pelo centro, o valor máximo da distância de um partícula ao eixo é $L/2$. No caso em que o eixo passa por uma das extremidades da barra, apenas metade das partículas estão a disância inferior a $L/2$do eixo de rotação. Como consequência, o momento de inércia da barra será maior no último caso.

Q7. Considere duas esferas, com a mesma massa, o mesmo raio e com a mesma aparência exterior. Contudo, uma delas é maciça e a outra é oca. É possível determinar qual delas é maciça e qual é oca, sem as abrir? Justifique.

O momento de inércia da esfera maciça, em relação a um eixo que passa pelo centro, é $I_1 = \frac{2}{5}MR^2$, em que M e R são, respectivamente, a massa e o raio da esfera. O momento de inércia da esfera oca, em relação a um eixo que passa pelo centro, é $I_2 \simeq MR^2$ (esta,os a supor, neste último caso, que a esfera oca é uma calote esférica fina, mas é evidente que, em qualquer caso, o valor do momento de inércia de uma esfera oca em relação a um eixo que passa pelo centro é superior ao valor do mesmo momento de inércia para uma esfera maciça).

Se deixarmos as esferas rolar ao longo de um plano inclinado de altura h, a partir do repouso, a conservação da energia mecânica conduz a

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

em que v_{CM} é o módulo da velocidade do centro de massa da esfera na base do plano inclinado e ω é o módulo da velocidade angular da esfera emtorno de um eixo que passa pelo centro, também na na base do plano. Utilizando, agora, a relação $v_{\mathrm{CM}} = \omega R$, obtemos

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{\mathrm{CM}}^2}{R^2},$$

de onde

$$v_{\mathrm{CM}}^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I}{R^2}}.$$

Concluímos que o módulo da velocidade do centro de massa na base do plano será maior para a esfera com menor valor de momento de inércia em relação a um eixo que passe pelo centro. Podemos então identificar as esferas medindo o tempo de descida do mesmo plano inclinado. O tempo de descida da esfera oca será inferior ao da esfera maciça.

Apenas por palavras, poderíamos dizer que:

- A energia potencia gravítica inicial das esfera se vai distribuir por energia cinética de rotação e energia cinética de traslação.

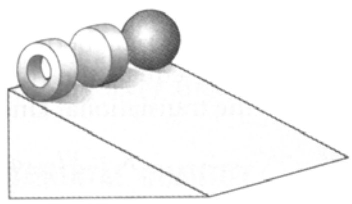
- A energia cinética de rotação é maior (para a mesma velocidade angular) quando o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro é menor.

- Consequentemente, como o módulo da velocidade angular é directamente proporcional ao da velocidade do CM, a razão entre os valores da energia cinética de rotação e de translação é maior se o valor do momento de inércia é menor, em que ponto da descida.

- O valor da energia cinética total na base do plano inclinado é o mesmo para ambas as esferas.

- o módulo da velocidade do centro de massa na base do plano será maior para a esfera maciça e consequentemente o tempo de descida é menor.

Q8 - Três objectos de densidade uniforme, uma esfera maciça, um cilindro maciço, e um cilindro oco, são colocados no topo de um plano inclinado, como se mostra na figura 2. Se os três forem largados do repouso, a partir de uma mesma altura e rolarem sem escorregar pelo plano inclinado, qual deles chega à base em primeiro lugar e em último lugar? Será o resultado dependente da massa ou do raio dos objectos?



O raciocínio para este problema é idêntico ao do anterior. O tempo de descida vai depender do momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} I_{\text{esfera maciça}} &= \frac{2}{5}MR^2 \\ I_{\text{cilindro maciço}} &= \frac{1}{2}MR^2 \\ I_{\text{cilindro oco}} &= MR^2. \end{aligned}$$

Utilizando agor o resultando da questão Q6, a velocidade do centro de massa do corpo na base do plano inclinado, de altura H, será

$$\begin{aligned} v_{\text{CM}}^2 &= \frac{2MgH}{M + \dfrac{I}{R^2}} \\ &= \frac{2gH}{(1+\beta)}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \beta_{\text{esfera maciça}} &= \frac{2}{5} \\ \beta_{\text{cilindro maciço}} &= \frac{1}{2} \\ \beta_{\text{cilindro oco}} &= 1. \end{aligned}$$

Concluímos que a velocidade do CM na base do plano é maior para a esfera maciça, seguida do cilindro maciço e por dim pelo cilindro oco. Os valores dos tempos de descida estarão ordenados de forma inversa e *não dependem* nem da massa nem do raio do corpo.

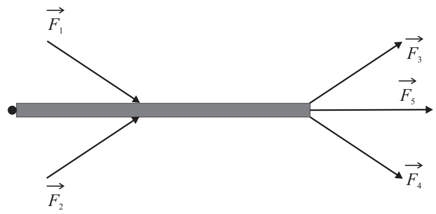
Q9 - Dois cilindros com as mesmas dimensões e massa igual são postos a rodar em torno dos seu eixos longitudinais com a mesma velocidade angular. Um é oco e o outro está cheio de água. Qual dos dois cilindros é mais fácil fazer parar de rodar?

Para o mesmo valor da velocidade angular, a energia cinética do cilindro oco é superior à do cilindro com água. Para fazer chegar ao repouso é necessário que uma força exterior exerça trablho sobre o cilindro, que será maior no primeiro caso. É portanto mais fácil fazer parar o cilinfro cheio de água.

Q10 - Suponha que apenas duas forças externas actuam num corpo rígido, e que as duas forças têm o mesmo módulo e direcção mas sentidos opostos. Em que condições este sistema de forças terá como consequência a rotação do corpo?

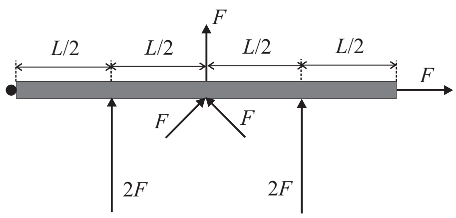
É necessário que as forças se exerçam em dois pontos cujas distâncias ao eixo de rotação sejam diferentes, para que os momentos de força em relação a esse eixo possuam módulos diferentes.

Q11 - Cinco forças são aplicadas a uma porta. Indique, para cada força, se o valor do momento angular em relação ao eixo de rotação da porta é positivo, negativo, ou nulo, utilizando a convenção de sinais habitual.



$$\begin{aligned}
\tau_1 &< 0;\\
\tau_2 &> 0;\\
\tau_3 &> 0;\\
\tau_4 &< 0;\\
\tau_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Q12 - Seis forças, com módulo F ou $2F$, são aplicadas a uma porta. coloque por ordem, de módulo maior para o menor, os momentos de força $\vec{\tau}_1$ a $\vec{\tau}_6$, em relação ao eixo de rotação da porta.



Numerando as forças da esquerda para a direita,

$$
\begin{aligned}
|\vec{\tau}_1| &= \frac{L}{2} \times 2F = LF \\
|\vec{\tau}_2| &= L \times F \times \sin\phi \\
|\vec{\tau}_3| &= L \times F \\
|\vec{\tau}_4| &= L \times F \times \sin\phi \\
|\vec{\tau}_5| &= \frac{3L}{2} \times 2F = 3LF \\
|\vec{\tau}_6| &= 2L \times F \times \sin 0 = 0.
\end{aligned}
$$

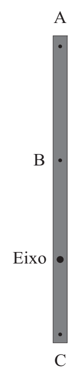
em que ϕ é o ângulo entre a direcção da força e a da régua no caso da força $\vec{F}_2$. Concluímos

$$|\vec{\tau}_5| > |\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_3| > |\vec{\tau}_2| = |\vec{\tau}_4| > |\vec{\tau}_6|$$

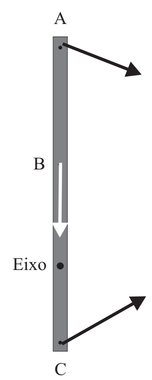
Q13. a) Desenhe um vector força aplicado no ponto A, cujo momento em relação ao eixo indicado seja negativo.

b) Desenhe um vector força aplicado no ponto B, cujo momento em relação ao eixo indicado seja nulo.

c) Desenhe um vector força aplicado no ponto C, cujo momento em relação ao eixo indicado seja positivo.

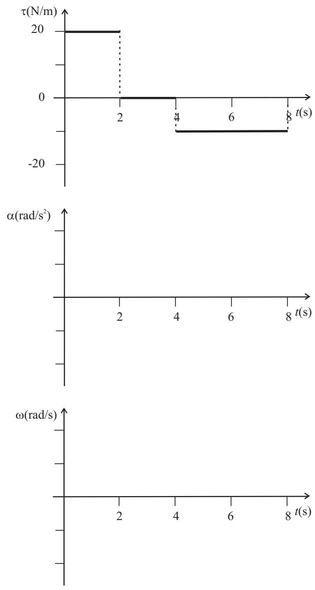


Vamos adoptar como positivo o momento de força perpendicular ao plano do papel, dirigido para fora deste ou, alternativamente, vamos considerar como positivo o momento de uma força que, isoladamente, faça rodar a porta no sentido directo, visto de cima. Exemplos das forças pedidas (mas não os únicos possíveis) encontram-se na figura seguinte:



Q14 - O primeiro gráfico indica o valor do momento, em relação ao eixo, da força resultante exercida numa roda de amolador, em função do tempo.

O momento de inércia da roda em relação ao eixo é $I = 10\,\mathrm{kg\,m^2}$. Desenhe os correspondentes gráficos da aceleração angular em função do tempo, $\alpha = \alpha(t)$, e da velocidade angular em função do tempo, $\omega = \omega(t)$. Suponha $\omega(0) = 0$.



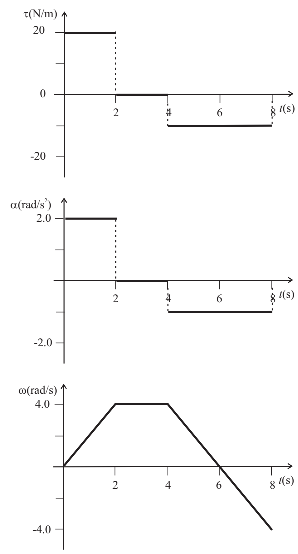
A relação entre o momento da força e a aceleração angular (no caso de eixo de rotação fixo, que dispensa a notação vectorial) é

$$\tau = I\alpha,$$

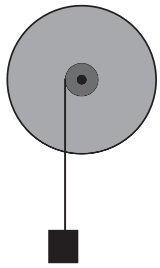
em que I é o momento de inércia do corpo, em relação ao eixo de rotação. POr outro lado, no movimento de rotação em torno de um eixo fixo, com aceleração angular, α, constante, a relação entre esta última grandez, a velocidade angular, ω, e o tempo, t, é

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)\,,$$

em que ω_0 é o valor da velocidade angular no instante t_0. O resultado será



Q15 -A roda da figura tem movimento de rotação em torno de um eixo central, sem atrito. Existe um bloco suspenso de uma corda, enrolada num num cilindro de menor raio que a roda, mas movendo-se solidariamente com esta, em torno do mesmo eixo. O bloco é largado no instante $t = 0\,\mathrm{s}$ e atinge o solo no instante $t = t_1$.



a) Desenhe um gráfico de $\omega = \omega(t)$, com início em $t = 0\,\mathrm{s}$ e continuando por algum tempo $t > t_1$.

O gráfico é análogo (mas com valores diferentes) ao dos primeiros 2 s da questão Q14.

b) O módulo da aceleração do bloco, durante a descida é menor, igual ou superior a g? Justifique.

O módulo da aceleração do bloco é inferior a g porque há conservação da energia mecânica do sistema e parte da energia potencial inicial é convertida em energia cinética de rotação do cilindro, o que conduz a um valor do módulo da aceleração do bloco inferior ao que teria se caisse livremente.

Problemas:

P1 - O prato de um gira-discos roda a uma taxa de $33\frac{1}{3}$ rev/ min e demora $60.0\,\mathrm{s}$ até ficar em repouso quando é desligado. Determine:

a) o valor da sua aceleração angular;

b) o número de revoluções que dá até parar.

Utilizando

$$\begin{aligned}\omega-\omega_0 &= \alpha t\\ \alpha &= \frac{\omega-\omega_0}{t}\\ \alpha &= \frac{0-33.33\mathbf{rev}/\min}{60.0\,\mathrm{s}^2}\\ &= -9.3\times10^{-3}\ \mathrm{rev\ s^{-2}}.\end{aligned}$$

Agora podemos utilizar a relação entre a posição, a velocidade e a acelaração angulares,

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\,(\theta-\theta_0)$$

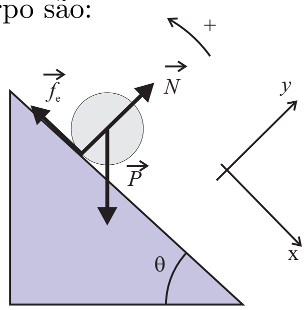
para obter

$$\begin{aligned}0-\left(\frac{33.33\mathbf{rev}/\min}{60\,\mathrm{s}}\right)^2 &= -2\times9.3\times10^{-3}\,(\theta-\theta_0)\\ \theta-\theta_0 &= \frac{\left(\frac{33.33\mathbf{rev}/\min}{60\,\mathrm{s}}\right)^2}{2\times9.3\times10^{-3}\mathrm{rev\ s^{-2}}}\\ &= 16.6\ \mathrm{rev}\end{aligned}$$

P2 - Considere um disco sólido uniforme, que rola por um plano inclinado abaixo.

a) Determine a aceleração do centro de massa do disco, e compare esta aceleração com a que teria um arco uniforme.

a) As forças que actuam em cada corpo são:



$\vec{N}$ → Força,normal ao plano inclinado, exercida pelo plano no disco;
$\vec{P}$ → Peso do disco;
$\vec{f_e}$ → Força de atrito estático entre o plano e p disco (é esta força que origina o rolamento).
Em ambos os casos, disco sólido e arco, temos:

$$\begin{aligned}\vec{N}+\vec{P}+\vec{f_e} &= M\vec{a}\\ \vec{\tau}_N+\vec{\tau}_P+\vec{\tau}_{f_e} &= I\vec{\alpha},\end{aligned}$$

em que M é a massa do corpo, $\vec{a}$ a aceleração do centro de massa, $\vec{\tau}_N$, $\vec{\tau}_P$ e $\vec{\tau}_{f_e}$ são os momentos da forças $\vec{N}$, $\vec{P}$ e $\vec{f_e}$ em relação a um eixo de rotação, e I e $\vec{\alpha}$ são, respectivamente, o momento de inércia e a aceleração angular do corpo em relação a esse eixo. Vamos utilizar o sistema de referência indicado na figura e o eixo de rotação que passa pelo centro de massa do corpo (que coincide com o centro geométrico do corpo). As equações escalares correspondentes às duas equações vectoriais apresentadas, são

$$\begin{aligned} N - Mg\cos\theta &= 0 \\ Mg\sin\theta - f &= Ma \\ -\tau_{f_\mathrm{e}} &= I_\mathrm{CM}\alpha \end{aligned}$$

ou

$$f_\mathrm{e}R = -I_\mathrm{CM}\alpha$$

Neste caso, com o sistema de referência escolhido, $\alpha = -\dfrac{a}{R}$, em que R é o raio do cilindro, e, consequentemente,

$$f_\mathrm{e} = I_\mathrm{CM}\frac{a}{R^2}$$

e

$$\begin{aligned} Mg\sin\theta - I_\mathrm{CM}\frac{a}{R^2} &= Ma \\ a\left(M + \frac{I_\mathrm{CM}}{R^2}\right) &= Mg\sin\theta \\ a &= \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I_\mathrm{CM}}{MR^2}\right)} \end{aligned}$$

O momento de inércia do disco (que é um cilindro) em torno do seu eixo principal é $I_\mathrm{CM} = \dfrac{1}{2}MR^2$, de onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3}g\sin\theta \end{aligned}$$

Por outro lado, o momento de inércia do arco é MR^2, ou

$$a_\mathrm{a} = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

b) Qual o valor mínimo do coeficiente de atrito que é necessário para manter o disco em rolamento puro?

Para que haja rolamento, $a = -\alpha R$, condição utilizada acima. Portanto

$$f_\mathrm{e} = I_\mathrm{CM}\frac{a}{R^2} \leq \mu N$$

ou

$$a \leq \frac{\mu g M\cos\theta R^2}{I_\mathrm{CM}}$$

e

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{I_\mathrm{CM}}{gM\cos\theta R^2}a \\ &\geq \frac{MR^2}{gM\cos\theta R^2}\frac{2}{3}g\sin\theta \\ &\geq \frac{2}{3}\tan\theta \end{aligned}$$

P3 - Uma lata de sopa que tem de massa $215\,\mathrm{g}$, altura $10.8\,\mathrm{cm}$, e diâmetro $6.38\,\mathrm{cm}$, é colocada em repouso no topo de um plano inclinado que tem $3.00\,\mathrm{m}$ de comprimento e faz um ângulo de $25.0\,^{\circ}$ com a horizontal. Utilizando um método que envolva energia, calcule o momento de inércia da lata, sabendo que ela demora $1.50\,\mathrm{s}$ a atingir a base do plano inclinado.

No topo a energia é toda potencial, na base é cinética de translação e rotação, em que I é o momento de inércia da lata em relação ao seu eixo principal:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

com a velocidade do centro de massa dada por $v = \omega R$, de onde

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I}{R^2}\right) &= Mgh \\
v^2 &= \frac{2Mgh}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)} \\
M + \frac{I}{R^2} &= \frac{2Mgh}{v^2} \\
I &= \frac{2MghR^2}{v^2} - MR^2
\end{aligned}$$

A velocidade do CM na base do plano é dada por

$$\ell = \frac{v_0 + v}{2}t$$

ou, com $v_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
v &= \frac{2\ell}{t} \\
&= \frac{2 \times 3.00\,\mathrm{m}}{1.50\,\mathrm{s}} \\
&= 4.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.
\end{aligned}$$

e

$$I = MR^2\left(\frac{g\sin 25\,^{\circ}t^2}{2\ell} - MR^2\right)$$

$$\begin{aligned}
I &= 0.215\,\mathrm{kg} \times \left(3.19 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2 \times \left[\frac{10\,\mathrm{m/\,s^2} \times (1.50\,\mathrm{s})^2 \times \sin 25\,^{\circ}}{2 \times 3.0\,\mathrm{m}} - 1\right] \\
&= 1.28 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}.
\end{aligned}$$

Se calcularmos o mesmo momento de inércia utilizando a fórmula $I = \frac{1}{2}MR^2$, obtemos

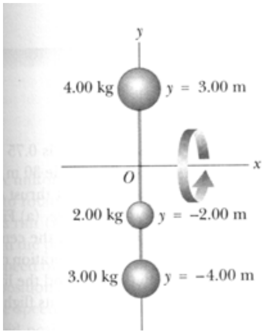
$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \times 0.215\,\mathrm{kg} \times \left(3.19 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2 \\
&= 1.10 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned}$$

P4 - Um carro que viaja sobre uma pista circular plana, acelera uniformemente a partir do repouso, com uma aceleração tangencial de $1.70\,\mathrm{m/s^2}$. O carro percorre um quarto de círculo até que derrapa para fora da pista. Determine o coeficiente de atrito estático entre o carro e a pista.

P5 - Três partículas estão ligadas por barras rígidas, de massa negligível., ao longo do eixo dos y, como se mostra na figura. Se o sistema rodar em torno do eixo dos x com uma velocidade angular de magnitude $2.0\ \mathrm{rad/s}$, determine:

a) o momento de inércia em torno do eixo dos x e a energia total de rotação;

b) a velocidade linear de cada partícula e a energia total do sistema.



a) O momento de inércia do sistema em relação ao eixo dos x é dado por

$$I = m_1 y_1^2 + m_1 y_2^2 + m_1 y_3^2,$$

em que y_i é a coordenada no eixo dos y do centro de massa da esfera i. Temos, assim,

$$\begin{aligned} I &= 4.00\,\mathrm{kg} \times 3.00\,\mathrm{m}^2 + 2.00\,\mathrm{kg} \times \left(-2.00\,\mathrm{m}^2\right)^2 + 3.00\,\mathrm{kg} \times (-4.00\,\mathrm{m})^2 \\ &= 92.0\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

A energia cinética de rotação do sistema é

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 92.0\,\mathrm{kg\,m^2} \times (2.0\,\mathrm{rad/s})^2 \\ &= 1.8 \times 10^2\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

b) A velocidade linear de cada esfera é, em módulo,

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega r_1 = 2.0 \times 3.00 = 6.0\,\mathrm{m/s^{-1}} \\ v_2 &= \omega r_2 = 2.0 \times 2.00 = 4.0\,\mathrm{m/s^{-1}} \\ v_3 &= \omega r_3 = 2.0 \times 4.00 = 8.0\,\mathrm{m/s^{-1}} \end{aligned}$$

A energia cinética total é

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left[4.00\,\mathrm{kg} \times (6.0\,\mathrm{m/s})^2 + 2.00\,\mathrm{kg} \times (4.0\,\mathrm{m/s})^2 + 3.00\,\mathrm{kg} \times (8.0\,\mathrm{m/s})^2\right] \\ &= 1.8 \times 10^2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

que evidentemente coincide com o valor acima.

P6 - Uma roda de bicicleta tem de diâmetro $64.0\,\mathrm{cm}$ e massa de $1.80\,\mathrm{kg}$. A bicicleta está colocada sobre uma passadeira rolante estacionária, estando uma força resistiva de $120\,\mathrm{N}$ aplicada na borda do pneu. Presuma que toda a massa da roda está concentrada no raio exterior. Para imprimir à roda uma aceleração de $4.5\,\mathrm{rad/\,s^2}$, qual a força que deve ser aplicada por uma corrente que passa através de uma roda dentada de diâmetro: i) $9.0\,\mathrm{cm}$, ii) $5.6\,\mathrm{cm}$?

O momento total aplicado à roda de bicicleta em relação ao centro desta é a soma vectorial do momento da força resistiva aplicada na borda da roda ($\vec{\tau}_{F_\mathrm{R}}$) e do momento da força aplicada através da roda dentada ($\vec{\tau}_{F_\mathrm{D}}$). Estes momentos têm sentidos (e a mesma linha de acção, perpendicular ao plano da roda). Portanto,

$$\begin{aligned}\tau_\mathrm{res} &= \tau_{F_\mathrm{D}} - \tau_{F_\mathrm{R}}\\ &= I\alpha,\end{aligned}$$

em que α é o módulo da aceleração angular da roda e I o momento de inércia deste em relação ao seu eixo principal.. Temos assim, sendo R o raio da roda,

i)

$$\begin{aligned}\tau_\mathrm{res} &= r_1 F_\mathrm{D} - R F_\mathrm{R}\\ &= I\alpha\end{aligned}$$

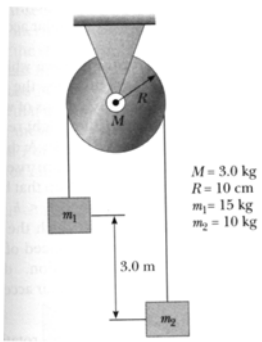
ou

$$\begin{aligned}(0.045\,\mathrm{m})\,F_1 - 0.32\,\mathrm{m}\times 120\,\mathrm{N} &= 1.80\,\mathrm{kg}\times(0.32\,\mathrm{m})^2\times 4.5\,\mathrm{rad/\,s^2}\\ F_1 &= \frac{1.80\,\mathrm{kg}\times(0.32\,\mathrm{m})^2\times 4.5\,\mathrm{rad/\,s^2} + 0.32\,\mathrm{m}\times 120\,\mathrm{N}}{0.045\,\mathrm{m}}\\ &= 8.72\times 10^2\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1.80\,\mathrm{kg}\times(0.32\,\mathrm{m})^2\times 4.5\,\mathrm{rad/\,s^2} + 0.32\,\mathrm{m}\times 120\,\mathrm{N}}{0.028\,\mathrm{m}}\\ &= 1.40\times 10^3\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

P7 - Um corpo com massa de $15\,\mathrm{kg}$ e outro corpo com massa de $10\,\mathrm{kg}$ estão suspensos por uma roldana que tem de raio $10\,\mathrm{cm}$ e massa de $3\,\mathrm{kg}$, como se mostra na figura. A corda tem massa negligível. e faz rodar a roldana sem escorregar. A roldana roda sem atrito. Os corpos partem do repouso quando distam um do outro $3.0\,\mathrm{m}$. Considere a roldana como um disco uniforme e determine as velocidades dos dois corpos quando passam um pelo outro.



a) Vamos utilizar a conservação de enegia mecânica:

Vamos considerar o valor zero da energia potencial gravítica o nível a que estão ambas as massas quando passam uma pela outra.

A energia cinética quando se inicia o movimento é:

$$E_{\mathrm{C}_i} = 0$$

porque o sistema está em repouso. A energia potencial nesse instante é

$$E_{\mathrm{P}_i} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + MgH$$

em que M e H são a massa e altura da roldana, respectivamente.

Quando as massa passam uma pela outra, temos

$$E_{\mathrm{C}_f} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

e

$$E_{\mathrm{P}_f} = MgH.$$

Como

$$E_{\mathrm{tot}_i} = E_{\mathrm{tot}_f}$$

temos

$$\begin{aligned} m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + MgH &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + MgH \\ m_1 g h_1 + m_2 g h_2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

Agora

$$v = \omega R$$

em que R é o raio da roldana, e $I = \frac{1}{2} M R^2$, vindo, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{4} M R^2 \frac{v^2}{R^2} &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \\ \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M \right) v^2 &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \\ v &= \sqrt{\frac{2g \left(m_1 h_1 + m_2 h_2 \right)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 10\,\mathrm{m/\,s^2} \left(15\,\mathrm{kg} \times 1.5\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{kg} \times 1.5\,\mathrm{m} \right)}{15\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \times 3\,\mathrm{kg}}} \\ &= 2.4\,\mathrm{m/\,s}. \end{aligned}$$

P8 - Uma barra cilíndrica com $24\,\mathrm{cm}$ de comprimento, massa $1.2\,\mathrm{kg}$ e raio $1.5\,\mathrm{cm}$, tem ligada a uma das extremidades uma bola de massa $20\,\mathrm{kg}$, e diâmetro $8.0\,\mathrm{cm}$. O conjunto está inicialmente na posição vertical, com a bola no topo, e é livre de rodar em torno da outra extremidade. Depois do conjunto ter caído um quarto de uma volta, determine:

a) a sua energia cinética rotacional;

Este problema pode ser resolvido por dois processos:

1.^{o} Processo - Consideramos o movimento do sistema como de rotação pura em torno de um eixo horizontal que passa na extremidade inferior da barra.

A energia cinética rotacional do sistema, após ter caído 1/4 de volta é igual a

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{Total}} \omega^2,$$

em que I_{Total} é o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação e ω é a velocidade angular do sistema após 1/4 de volta. Podemos agora utilizar $I_{\mathrm{Total}} = I_{\mathrm{barra}} + I_{\mathrm{bola}}$, em que I_{barra} e I_{bola} são, respectivamente, os momentos de inércia da barra e da bola, ambos em relação ao eixo horizontal que passa na extremidade inferior da barra.

Recorrendo a uma tabela de momentos de inércia, $I_{\mathrm{barra}} = \frac{1}{3} M_{\mathrm{barra}} L^2$, em que L é o comprimento da barra, $I'_{\mathrm{bola}} = \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2$, em relação a um eixo que passa pelo centro da bola, de raio R. Utilizando o teorema dos eixos paralelos, obtemos $I_{\mathrm{bola}} = \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2 + M_{\mathrm{bola}} \left(L + R\right)^2$, agora em relação ao eixo que passa pela base da barra cilíndrica.

Consequentemente, a energia cinética total do sistema é

$$E_{\mathrm{C_{total}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} M_{\mathrm{barra}} L^2 + \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2 + M_{\mathrm{bola}} \left(L + R\right)^2 \right] \omega^2,$$

e, utilizando a conservação da energia mecânica,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} M_{\mathrm{barra}} L^2 + \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2 + M_{\mathrm{bola}} \left(L + R\right)^2 \right] \omega^2 = M_{\mathrm{barra}} g \frac{L}{2} + M_{\mathrm{bola}} \left(L + R\right) g,$$

A energia cinética total do sistema, após 1/4 de volta será, neste caso

$$E_{\mathrm{C_{total}}} = M_{\mathrm{barra}} g \frac{L}{2} + M_{\mathrm{bola}} \left(L + R\right) g,$$

2.^{o} Processo - Consideramos o movimento do sistema como uma combinação, para cada corpo, de rotação em torno de um eixo horizontal que passa pelo respectivo centro de massa e de translação pura desse centro de massa.a barra.

Após 1/4 de volta, a energia cinética total da barra é,

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{C_{barra}}} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} M_{\mathrm{barra}} L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_{\mathrm{barra}} v^2_{\mathrm{CM_{barra}}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} M_{\mathrm{barra}} L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_{\mathrm{barra}} \left(\frac{L}{2} \omega \right)^2, \end{aligned}$$

enquanto que a energia cinética total da bola é

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{C_{bola}}} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_{\mathrm{bola}} v^2_{\mathrm{CM_{bola}}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} M_{\mathrm{bola}} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_{\mathrm{bola}} \left[\left(L + R\right) \omega \right]^2, \end{aligned}$$

Portanto a energia cinética total do sistema é

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{C_{total}}} &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}M_{\mathrm{barra}}L^2\omega^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{barra}}\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2\omega^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{bola}}\left[(L+R)\,\omega\right]^2\\
&= \left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{barra}}\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{bola}}\left[(L+R)\right]^2\right\}\omega^2\\
&= \left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{1}{8}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{bola}}\left[(L+R)\right]^2\right\}\omega^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{12}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{1}{4}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+M_{\mathrm{bola}}\left[(L+R)\right]^2\right\}\omega^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}M_{\mathrm{barra}}L^2+\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+M_{\mathrm{bola}}\left[(L+R)\right]^2\right\}\omega^2,
\end{aligned}$$

que é o resultado acima.

A energia cinética rotacional será apenas a que está associada á rotação, ou seja,

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{C\ rotacional_{total}}} &= E_{\mathrm{C\ rotacional_{barra}}}+E_{\mathrm{C\ rotacional_{bola}}}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}M_{\mathrm{barra}}L^2\omega^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2\omega^2,
\end{aligned}$$

que só pode ser obtida após se conhecer a velocidade angular do sistema, após 1/4 de volta

b) a sua velocidade angular;

Da equação que exprime a conservação da energia mecânica, obtemos,

$$\omega^2=\frac{M_{\mathrm{barra}}g\dfrac{L}{2}+M_{\mathrm{bola}}\left(L+R\right)g}{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}M_{\mathrm{barra}}L^2+\dfrac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+M_{\mathrm{bola}}\left(L+R\right)^2\right]}.$$

c) a velocidade linear da bola;

Será

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{CM_{bola}}} &= (L+R)\,\omega \qquad (1)\\
&= (L+R)\sqrt{\frac{M_{\mathrm{barra}}g\dfrac{L}{2}+M_{\mathrm{bola}}\left(L+R\right)g}{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}M_{\mathrm{barra}}L^2+\dfrac{2}{5}M_{\mathrm{bola}}R^2+M_{\mathrm{bola}}\left(L+R\right)^2\right]}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

d) a velocidade que a bola teria se tivesse caído livremente de uma altura igual ao raio; compare este valor com o obtido em c).

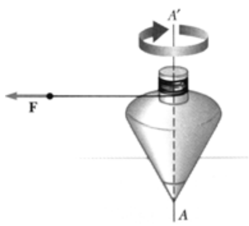
Partindo da expressão da conservação da energia mecânica da bola,

$$\frac{1}{2}M_{\mathrm{bola}}v_{\mathrm{CM_{bola}}}^2=M_{\mathrm{bola}}g\left(L+R\right)$$

obtamos a velocidade que a vola teria se tivesse caído livremente

$$v_{\mathrm{CM_{bola}}}=\sqrt{2g\left(L+R\right)} \qquad (3)$$

P9 - Um pião, como o representado na figura, tem um momento de inércia $4.00\times10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$ e está inicialmente em repouso. Ele é livre de rodar em torno do eixo estacionário AA'. A corda enrolada à volta da pega do pião é puxada de forma a se manter uma tensão constante de $5.57\,\mathrm{N}$. Supondo que a corda não escorrega enquanto é desenrolada, determine a velocidade angular do pião depois de terem sido puxados $80.0\,\mathrm{cm}$ de corda.



O trabalho realizado pela corda é

$$\begin{aligned} F\ell &= 5.57\,\mathrm{N} \times 0.80\,\mathrm{m} \\ &= 4.46\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Este trabalho será igual à energia cinética adquirida pelo pião, ou

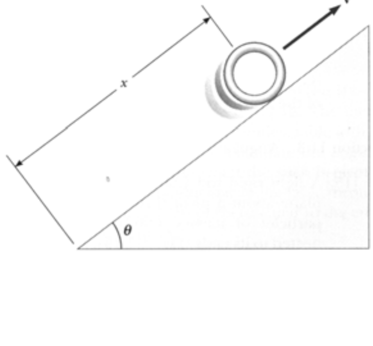
$$\frac{1}{2} I\omega^2 = 4.46\,\mathrm{J}$$

de onde

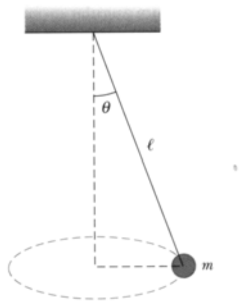
$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2 \times 4.46\,\mathrm{J}}{4.00 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}}} \\ &= 1.49 \times 10^2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}. \end{aligned}$$

P10 - Uma esfera sólida tem raio de $0.200\,\mathrm{m}$ e massa de $150\,\mathrm{kg}$. Qual o trabalho que é necessário realizar para pôr a esfera a rolar com uma velocidade angular de $50.0\,\mathrm{rad/s}$ numa superfície horizontal? (Presuma que a esfera parte do repouso e rola sem escorregar).

P11 - Um ringue de massa $2.4\,\mathrm{kg}$, raio interior $6.0\,\mathrm{cm}$ e raio exterior $8.0\,\mathrm{cm}$, rola sem escorregar por um plano inclinado acima, que faz um ângulo $\theta = 37^\circ$ com a horizontal, como se mostra na figura. No momento em que o ringue atinge a posição $x = 2.0\,\mathrm{m}$ sobre o plano a sua velocidade é $2.8\,\mathrm{m/s}$. O ringue continua a subir o plano até atingir uma certa altura e depois rola pelo plano abaixo. Presumindo que o plano é suficientemente longo para que o ringue não role para fora no topo, determine o alcance máximo daquele sobre o plano.



P12 - Um pêndulo cónico tem um corpo de massa m ligado a um fio de comprimento ℓ, descrevendo o corpo uma trajectória circular num plano horizontal, enquanto o fio mantém um ângulo constante θ com a vertical, como se mostra na figura. Mostre que o módulo do momento angular da massa em torno do ponto de suspensão é dado por $L = \sqrt{\left(m^2 g l^3 \sin^2\theta\right)/\cos\theta}$.



O módulo do momento angular do corpo em relação ao ponto de suspensão é $L = mv\ell$. As forças que se exercem ma massa são o peso e a tensão. A força centrípeta é $F_{\mathrm{r}} = T\sin\theta$. Como $T\cos\theta = P$, temos

$$F_{\mathrm{r}} = mg\tan\theta = m\frac{v^2}{r}$$

de onde

$$\begin{aligned} v^2 &= gr\tan\theta \\ &= g\ell\sin\theta\tan\theta \end{aligned}$$

e

$$v = \sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}$$

Consequentemente

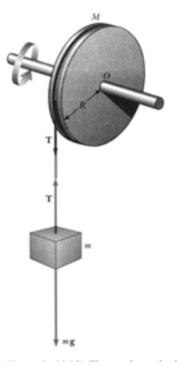
$$L = mv\ell = \sqrt{m^2 g\ell^3 \sin^2\theta/\cos\theta}$$

P13 - Um corpo de massa $4.0\,\mathrm{kg}$ está ligado a uma corda leve, a qual está enrolada em torno de uma roldana, como se mostra na figura. A roldana é um cilindro maciço homogéneo com raio $8.0\,\mathrm{cm}$ e massa $2.0\,\mathrm{kg}$. Calcule:

a) o momento total das forças que estão a actuar, em torno do centro da roldana O,

b) o momento angular total do sistema em relação a O,

c) a aceleração do corpo.



P14 - Um disco uniforme de massa $3.0\,\mathrm{kg}$ e raio $0.200\,\mathrm{m}$ roda em torno de um eixo fixo perpendicular à sua superfície. Se a frequência angular de rotação é $6.00\,\mathrm{rad/s}$, calcule o momento angular do disco quando o eixo de rotação passa:

a) através do seu centro de massa;

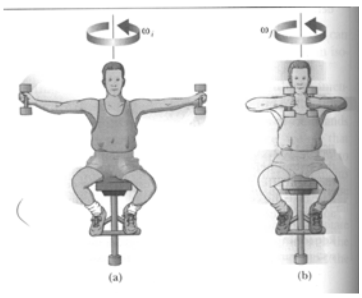
b) através de um ponto situado no ponto médio entre o centro e a orla do disco.

P15 - Uma mulher com massa $60\,\mathrm{kg}$ está de pé junto da orla de um gira-discos na horizontal que tem momento de inércia de $500\,\mathrm{kg\,m^2}$ e $2.00\,\mathrm{m}$ de raio. O gira-discos está inicialmente parado e é livre de rodar sem atrito em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. A mulher começa então a caminhar ao longo da orla no sentido dos ponteiros do relógio (vista de cima do sistema) a uma velocidade constante com módulo $1.50\,\mathrm{m/s}$ relativamente à Terra.

a) Em que direcção e com que velocidade angular roda o gira-discos?

b) Qual o trabalho realizado pela mulher para pôr o gira-discos em movimento?

P16 - Um estudante segura dois halteres, cada um com massa $10.0\,\mathrm{kg}$, como se mostra na figura. Quando os seus braços estão estendidos horizontalmente, os halteres estão a $1.00\,\mathrm{m}$ do eixo de rotação, e rodam com uma velocidade angular de módulo $2.00\,\mathrm{rad/s}$. O momento de inércia do estudante mais o banco, em relação ao eixo de rotação é $8.00\,\mathrm{kg\,m^2}$ e presume-se que é constante. Se o estudante puxar os pesos horizontalmente para $0.250\,\mathrm{m}$ do eixo de rotação, calcule:



a) o módulo da velocidade angular final do sistema, em relação ao eixo de rotação;

No processo, as forças envolvidas são interiores ao sistema estudante+banco+halteres, pelo que o momento de inércia do sistema, em relação a qualquer eixo de um referencial de inércia não varia. Considerande o eixo de rotação do estudante mais o banco, teremos

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f,$$

em que $I_i\,(I_f)$ e $\omega_i\,(\omega_f)$ são, respectivamente o momento de inércia inicial (final) e a velocidade inicial (final) do sistema, em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia total é a soma do momento de inércia do estudante mais o banco e dos halteres, ou

$$\begin{aligned} I_i &= 8.00\ \mathrm{kg\,m^2} + 2\times 10.0\,\mathrm{kg}\times(1.00\,\mathrm{m})^2 \\ &= 28.0\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_f &= 8.00\ \mathrm{kg\,m^2} + 2\times 10.0\,\mathrm{kg}\times(0.250\,\mathrm{m})^2 \\ &= 9.25\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

:Obtemos, assim,

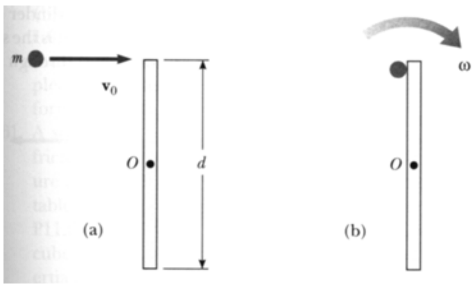
$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i \frac{I_i}{I_f} \\ &= 2.00\,\mathrm{rad/\,s} \frac{28.0\,\mathrm{kg\,m^2}}{9.25\,\mathrm{kg\,m^2}} \\ &= 6.05\,\mathrm{rad/\,s}\end{aligned}$$

b) a variação de energia mecânica do sistema.
A variação da energia mecânica do sistema resume-se à variação da energia cinética, ou

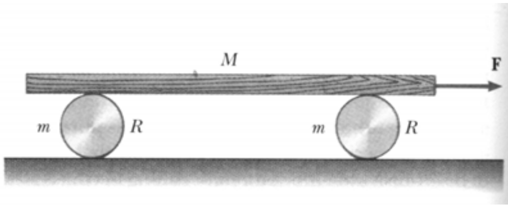
$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{mec}} &= \Delta E_{\mathrm{c}} \\ &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \\ &= \frac{1}{2} 9.25\,\mathrm{kg\,m^2} \times (6.05\,\mathrm{rad/\,s})^2 - \frac{1}{2} 28.0\,\mathrm{kg\,m^2} \times (2.00\,\mathrm{rad/\,s})^2 \\ &= 1.13 \times 10^2\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

P17 - Uma partícula de massa m é lançada com uma velocidade inicial de módulo v_0 segundo um ângulo θ com a horizontal. A partícula move-se sob a acção da gravidade.
a) Determine o momento angular da partícula em relação à origem quando a partícula está: i) na origem; ii) no ponto mais alto da trajectória; iii) mesmo antes de bater no chão.
b) Qual o momento da força, em relação à origem, que faz variar o momento angular da partícula?

P18 - Um projéctil de massa m move-se horizontalmente para a direita com velocidade v_0, (ver figura a). O projéctil bate na extremidade de uma barra em repouso, de massa M e comprimento d, e fica agarrado a ela, rodando então o conjunto, sem atrito, em torno de um eixo que passa pelo centro da barra O (ver figura b). Determine:
a) a velocidade angular do sistema após a colisão,
b) a fracção de energia mecânica perdida na colisão.



P19 - Uma placa de massa $M = 6.0\,\mathrm{kg}$ desloca-se sobre dois cilindros maciços idênticos, cada um de raio $R = 5.0\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 20\,\mathrm{kg}$, como se mostra na figura. A placa é puxada por uma força constante horizontal $F = 6.0\,\mathrm{N}$ aplicada na sua extremidade, que é perpendicular aos eixos dos cilindros. Os cilindros rolam sem escorregar sobre uma superfície plana, não havendo também escorregamento entre a placa e os cilindros.
a) Determine a aceleração da placa e a dos cilindros.
b) Quais as forças de atrito que estão a actuar?



Folha de Cálculo:

S1 - Um disco com um momento de inércia de 100 kg·m^2, é livre de rodar em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro, como se mostra na figura 8. Uma força tangencial de magnitude que varia entre $F = 0$ e $F = 50.0$ N é aplicada a uma distância que varia entre $R = 0$ e $R = 3.0$ m, medida a partir do eixo de rotação. Faça uma folha de cálculo para determinar os valores de F e R que levam o disco a completar 2 revoluções em 10.0 s. São estes valores de F e R únicos?